INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 3

Exercice 1. [Variables aléatoires sur un espace de probabilité discret] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret. Montrer que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire si et seulement si pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $X^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{F}$.

Exercice 2. Reprenons l'espace de probabilité correspondant au lancer de deux dés à six faces équilibrés distincts, défini dans la série 1.

Definissez la fonction qui correspond à la somme des nombres qui se trouvent sur les faces des dés et montrez que cette fonction est une variable aléatoire.

Maintenant considérons la situation où l'on peut seulement savoir si le résultat de chaque dé est ou bien inférieur ou égal à 3, ou bien strictement supérieur à 3. Est-ce que la somme est toujours une variable aléatoire ? Si non, est-ce que vous avez une idée de quantité numérique qui serait une variable aléatoire et qui approximerait la somme aussi bien qu'on peut ?

Exercice 3. Une famille a deux animaux de compagnie, un brun et un gris. Chaque animal est soit un chien soit un chat, et l'on suppose que l'on vit dans un pays où il y a exactement le même nombre de chiens que de chats ainsi que le même nombre de chiens/chats bruns que gris.

1. Sans autres informations, quelle est la probabilité que la famille ait deux chiens ?

On passe devant la maison et on voit un chien jouer dans le jardin.

2. Quelle est maintenant la probabilité que la famille ait deux chiens ?

Modéliser la situation avec des probabilités conditionnelles.

Exercice 4. [Marche aléatoire simple et probabilités conditionnelles] Considérons la marche aléatoire simple de longueur n.

— Quelle est la probabilité que la marche se termine au point n au temps n ? Maintenant, supposons que le premier pas ait été de -1. Quelle est maintenant la probabilité que la marche se termine au point n au temps n ?

— Supposons que n soit pair. Quelle est la probabilité que la marche se termine au point 0 au temps n ? Maintenant, supposons que le premier pas ait été de -1. Quelle est maintenant la probabilité que la marche se termine au point 0 au temps n ?

Exercice 5. Le but de cet exercice est de prouver que la σ-algèbre de Borel [1] sur $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$, où τ_E est la topologie euclidienne, est aussi

1. la plus petite σ-algèbre contenant tous les pavés de la forme $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$;
2. la plus petite σ-algèbre contenant tous les demi-pavés de la forme $(-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]$.

Pour prouver le premier point, montrez que tout ensemble ouvert $U \in \tau_E$ peut être écrit comme une union dénombrable de pavés de la forme ci-dessus (indice : autour de chaque point rationnel dans U, considérez un pavé qui tient tout juste dans U). Déduisez le deuxième point du premier.

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que l'ensemble des $F \subseteq \mathbb{R}$ telles que $X^{-1}(F) \in \mathcal{F}$ est une $\sigma-$algèbre. En déduire que si $X^{-1}(F) \in \mathcal{F}$ pour tout intervalle (a, b), alors $X^{-1}(F) \in \mathcal{F}$ pour chaque ensemble borélien $F \in \mathcal{F}_B$.

1. c'est-à-dire la plus petite σ-algèbre contenant tous les ensembles ouverts d'un espace topologique

0.1 $\star$ Pour le plaisir (non-examinable) $\star$

Exercice 7. [$\star$ Topology vs σ-algebra II] Find all triplets $(X, \tau, \mathcal{F})$ such that τ is a topology on X, $\mathcal{F}$ is a $\sigma-$algebra on X and moreover $\tau = \mathcal{F}$. You can for example follow these steps :

— Given a set X and a partition $X = \sqcup_{j \in J} A_j$ of X, let $\mathcal{G}$ be the collection of all unions $\sqcup_{j \in J'} A_j$ for $J' \subset J$ (where the union over the empty set is understood to be empty). Show that $\mathcal{G}$ is both a topology and a σ-algebra over X.

— Show that any $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ which is both a σ-algebra and a topology over X can be constructed as the set of unions of elements of some partition of X.